

电场和磁场的边缘场传输矩阵中 有限积分数值的计算

胡肇恒

(中国科学院科学仪器厂)

[摘 要]为了计算电场和磁场的边缘场对离子运动轨道的作用,本文叙述了边缘场传输矩阵中有限积分数值计算的三种方法。给出了这些有限积分在各种电场和磁场的边缘场结构时的数值。文章还对有限积分数值的两种近似计算方法—内插法和多项式法,与精确算法进行了比较。其结果非常接近。最后叙述了由实验测量得到磁场的边缘场分布时有限积分数值的计算方法。

引 言

在高分辨率离子光学仪器设计中必须考虑电场和磁场的边缘场对离子轨道的影响。Herzog^[1]对平行板电场的边缘场进行了讨论, Wollnik和Ewald^[2]对它进行了二级近似处理。以后Matsuda^[3]对环形电场, Wollnik^[4]对非均匀磁场的边缘场进行了计算。

边缘场对离子运动的作用常用一个传输矩阵来表示。传输矩阵中的一些矩阵元与边缘场的分布有关。这些关系是用边缘场的有限积分^[2-4]的形式表现出来。因此计算了这些有限积分的数值,也就得到了边缘场传输矩阵。

一个扇形电场或磁场对离子运动的作用可以用三个传输矩阵的乘积表示。它们是电场(磁场)入口边缘场矩阵、理想电场(磁场)矩阵和出口边缘场矩阵。“TRIO”(离子光学三级近似计算^[5])可以对电场、磁场、漂移空间、四极透镜等组成的离子光学系统进行聚焦和像差计算。但是在该程序中,分别只给出了电场和磁场的三种结构的边缘场有限积分数值,因此大大限制了电场(磁场)的入口和出口端的结构选择。虽然有些积分是用图的形式^[6,7]给出,但是不能获得高精确度的数值。

为了扩大离子光学设计中对这一部分结构选择的可能性,本文给出了各种可能选择的结构尺寸的边缘场有限积分数值。只要把所需要的一组数值代入“TRIO”程序中就能对离子光学系统进行计算。文章叙述了计算电场(磁场)边缘场有限积分的精确计算和二种近似计算的程序步骤,同时也叙述了在实际测量磁场的边缘场分布时有限积分数值的计算。

电场和磁场的边缘场传输矩阵中的有限积分式

环形电场的边缘场传输矩阵中包含下列有限积分式^[3]:

1986年5月10日收

$$I_{1a} = E_0^{-1} \int_a^b E d\eta d\eta - \frac{1}{2} \eta_b^2 \quad (1)$$

$$I_{1b} = E_0^{-2} \int_a^b E^2 d\eta d\eta - I_{4a} \eta_b - \frac{1}{2} \eta_b^2 \quad (2)$$

$$I_2 = E_0^{-1} \int_a^b \eta \left(\int E d\eta \right) d\eta - \frac{1}{3} \eta_b^3 \quad (3)$$

$$I_{3a} = E_0^{-2} \int_a^b \left(\int E d\eta \right)^2 d\eta - \frac{1}{3} \eta_b^3 \quad (4)$$

$$I_{3b} = E_0^{-3} \int_a^b \left(\int E^2 d\eta \right) \left(\int E d\eta \right) d\eta - \frac{1}{2} I_{4a} \eta_b^2 - \frac{1}{3} \eta_b^3 \quad (5)$$

$$I_{4a} = E_0^{-2} \int_a^b E^2 d\eta - \eta_b \quad (6)$$

$$I_{4b} = E_0^{-3} \int_a^b E^3 d\eta - \eta_b \quad (7)$$

$$I_5 = E_0^{-2} \int_a^b (E')^2 d\eta \quad (8)$$

$$I_6 = E_0^{-2} \int_a^b \eta (E')^2 d\eta \quad (9)$$

$$I_7 = E_0^{-3} \int_a^b (E')^2 \left(\int \int E d\eta d\eta \right) d\eta \quad (10)$$

$$I_8 = E_0^{-2} \int_a^b (E')^2 d\eta d\eta - I_5 \eta_b \quad (11)$$

在这里 $E = E(\eta)$ 是垂直于电极边界方向沿 η 轴的边缘场分布函数, E' 是场强 E 对横座标 η 的导数。一个典型的边缘场分布曲线表示在图 1。图 1 中与理想场边界的距离 η 是以电场的径向中心半径 r_e 规一化。当 η_a 和 η_b 分别定义为 $E = 0$ 和 $E = E_0$ (E_0 是理想电场场强) 的座标位置时, 下列关系式适用:

$$\int_a^b E d\eta = \int_0^b E_0 d\eta = E_0 \eta_b \quad (12)$$

这里 a 和 b 分别对应于 η_a 和 η_b 。对于均匀磁场必须有下列两个有限积分式

$$I_1 = B_0^{-1} \int_a^b B d\eta d\eta - \frac{1}{2} \eta_b^2 \quad (13)$$

$$I_4 = B_0^{-2} \int_a^b B^2 d\eta - \eta_b \quad (14)$$

这里 $B = B(\eta)$ 是垂直于磁极边界方向沿 η 轴的边缘场分布函数。这两个有限积分式也可以应用到非均匀磁场中去, 但是, 对于非均匀磁场还需要附加一个有限积分式 I_{sm}

$$I_{sm} = B_0^{-1} \int_a^0 \eta B \, d\eta \quad (15)$$

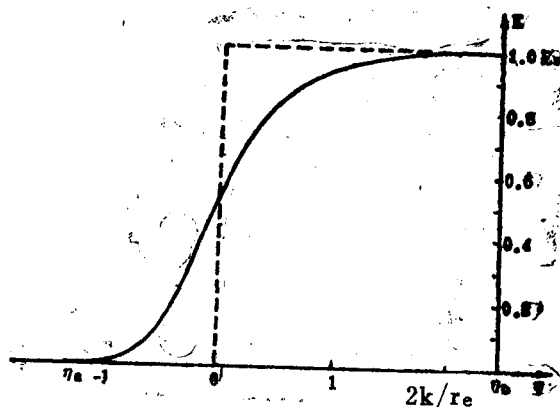


图1 边缘场分布曲线和理想场边界

边缘场分布函数

Herzog^[1]给出了两个平行电极两端加上屏蔽板后电场的边缘场分布函数。这个屏蔽板被命名为Herzog屏蔽板(简称屏蔽板)。边缘场分布函数与屏蔽板的厚薄有关。其结构分别表示在图2和图3。图中 $2k$ 是两个电极间的距离, $2b$ 是屏蔽板的缝宽, d 是屏蔽板和电极端面之间的距离。 X 坐标的原点选择在 d 的中央。理想边界ED和电极端面之间的距离 h 的数值表示如下

$$h = 0.5d - X_b + r_e \eta_b \quad (16)$$

在这里 η_b 由公式(12)给出, X_b 是 $r_e \eta_b$ 在 x 轴上的座标。因此,

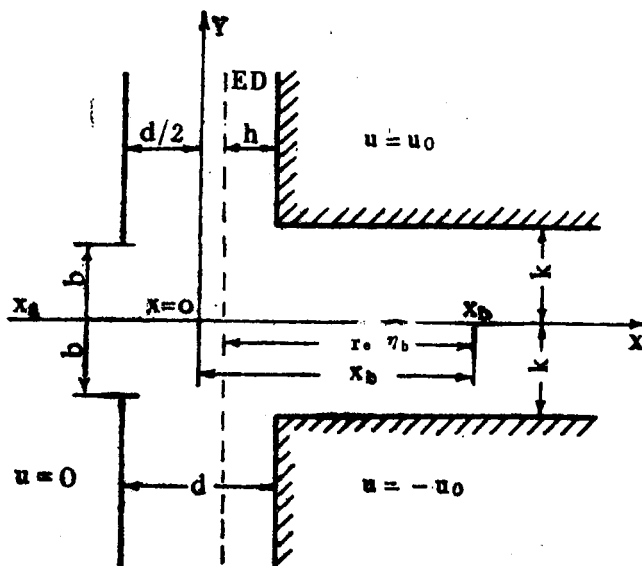


图2 电极和薄屏蔽板结构

和磁极之间距离大于磁极间隙时, 厚屏蔽板的计算也完全适用于磁场的边缘场。

边缘场有限积分的数值

边缘场有限积分数值由精密算法^[9]和以精密计算的数值为基础引导出来的两种近似算法^[10,11]得到。

(一) 有限积分数值精密算法

薄屏蔽板可以分成二种情况, 一种是屏蔽板的结构尺寸 b/k 和 d/k —可以任意选择的一般情况。这时理想场的边界和电极的端面不重合。另一种是特殊情况, 即电极端面就是理想场边界。这时, b 和 d ($k=1$) 相互关联, 给定了其中的一个数值后, 另一个也就相应地被确定了。

均匀磁场的边缘场与厚屏蔽板时电场的边缘场计算完全相同。这种场合只考虑 b 和 d 可以任意选择的一般情况。

下面首先叙述薄屏蔽板结构 b 和 d 为任意数值时, 各个有限积分式计算程序的步骤:

- (1) 由公式(19)和(20)计算出对应于 b 和 d 的 m 和 n 的数值。
- (2) 令 $r = -1 + 0.002b$, 由方程式(18)计算出场强对应的 X_a 数值。这时, 方程式(17)计算 $E(x)/E_0$ 。值应小于0.001。
- (3) 令 $E(X)/E_0 = 0.9995$, 方程式(17)计算出 r 值, 然后由方程式(18)计算出对应的 X_b 数值。
- (4) 当 X 是 X_a 和 X_b 区间内的任何数值时, 方程式(17)和(18)可以计算出该坐标处的 $E(X)/E_0$ 比值, 并且用差分法得到 $E'(X)/E_0$ 数值。
- (5) 除了三重有限积分(I_7)外, 其它有限积分的数值都是先把 X 区间等分成256个小段, 计算出每段的中心坐标处的场强, 然后再用Romberg积分法求得。而三重有限积分的计算则是采用叠加法。
- (6) 最后由方程式(16)计算出 h 值。对于理想场边界与电极端面相重合的特殊情况, 当 b 的数值给定后, 利用方程式(20)和(21)计算出 m 和 n 的数值, 然后由方程式(19)计算出 d 值。如果 d 值一定, 只要将方程式(19)和(20)相互对调就可以得到相应的 b 值。当 b 和 d 的数值决定后, 再按照上述同样的步骤计算出各个有限积分的数值。

对于厚屏蔽板, p 和 q 的数值由给定的 b 和 d 值通过方程式(24)和(25)计算出来。再由方程式(22)和(23)分别得到 $B(X)$ 和 X 的数值。以后计算的步骤与上述相同。

综合上述边缘场有限积分的形式可以归纳为五组: (1) 有限积分式中没有 E' 的一次积分 I_{4a} , I_{4b} 和 I_4 ; (2) 积分式中包含有 E' 的一次积分 I_5 和 I_6 ; (3) 积分式中包含有与 η 相乘项的一次积分 I_{5m} ; (4) 积分式中包含有二重有限积分形式 I_{1a} , I_{1b} , I_2 , I_{3a} , I_{3b} 和 I_1 ; (5) 三重有限积分 I_7 。

计算机计算时是依照各组的先后次序, 在同一组内则是对各个有限积分同时运算。最后把计算结果打印出来。积分式 $I_6 = -I_8$ 可用分部积分法得到证明。

薄屏蔽板边缘场有限积分一般场合时计算的结果列在表1。在这里 b/k 和 d/k 分别在0.4—1.20和0.4—2.0范围内。这时 h/k 从-0.0366到0.7630。表2中A和B分别给出了 b/k 和 d/k 分别为定量值时, 理想场边界与电极边界重合这一特殊情况的各个有限积分数值。这些结果与文献[8]的结果非常接近。表3给出了厚屏蔽板电场和磁场的边缘场各个有限积分的数

表 1 薄屏蔽板环状电极电场的边缘场各有限积分的数值。理想场边界与电极边界不重合, $G = k/r_e$

b/k	d/k	h/k	I_{1a}/G^2	I_{1b}/G^2	I_2/G^3	I_{3a}/G^3	I_{3b}/G^3	I_{4a}/G	I_{4b}/G	$I_5 \times G$	$I_6 = -I_8$	I_7/G
0.40	0.40	-0.0366	0.1143	0.1322	0.0224	0.0741	0.0766	-0.2483	-0.3861	0.6906	-0.0508	0.0400
0.40	0.80	0.2104	0.1431	0.1624	0.0273	0.0976	0.0976	-0.2817	-0.4363	0.5912	-0.0464	0.0466
0.40	1.20	0.3987	0.1859	0.2049	0.0313	0.1277	0.1252	-0.3281	-0.5042	0.4917	-0.0347	0.0571
0.40	1.60	0.5493	0.2417	0.2551	0.0319	0.1674	0.1583	-0.3806	-0.5783	0.4155	-0.0179	0.0719
0.40	1.90	0.6446	0.2909	0.2958	0.0288	0.2027	0.1859	-0.4210	-0.6338	0.3756	-0.0039	0.0853
0.60	0.40	0.0338	0.1511	0.1543	0.0171	0.0953	0.0937	-0.2840	-0.4372	0.6008	-0.0185	0.0575
0.60	0.80	0.2567	0.1767	0.1819	0.0225	0.1187	0.1151	-0.3102	-0.4712	0.5359	-0.0198	0.0617
0.60	1.20	0.4293	0.2157	0.2211	0.0263	0.1487	0.1413	-0.3500	-0.5300	0.4622	-0.0145	0.0695
0.60	1.60	0.5703	0.2682	0.2685	0.0260	0.1872	0.1728	-0.3971	-0.5973	0.4003	-0.0032	0.0822
0.60	2.00	0.6888	0.3321	0.3207	0.0199	0.2338	0.2085	-0.4471	-0.6662	0.3540	0.0113	0.0988
0.80	0.40	0.1345	0.2074	0.1855	-0.0020	0.1296	0.1206	-0.3262	-0.4841	0.5289	0.0071	0.0819
0.80	0.80	0.3188	0.2242	0.2081	0.0074	0.1500	0.1393	-0.3439	-0.5131	0.4883	0.0022	0.0815
0.80	1.20	0.4700	0.2567	0.2427	0.0132	0.1771	0.1626	-0.3765	-0.5621	0.4347	0.0035	0.0858
0.80	1.60	0.5984	0.3042	0.2864	0.0132	0.2132	0.1916	-0.4178	-0.6215	0.3852	0.0107	0.0957
0.80	2.00	0.7092	0.3643	0.3357	0.0065	0.3580	0.2252	-0.4633	-0.6847	0.3457	0.0218	0.1103
1.00	0.40	0.2596	0.2815	0.2235	-0.0475	0.1736	0.1535	-0.3724	-0.5428	0.4718	0.0282	0.1113
1.00	0.80	0.3927	0.2825	0.2383	-0.0244	0.1856	0.1653	-0.3806	-0.5590	0.4483	0.0206	0.1042
1.00	1.20	0.5189	0.3084	0.2691	-0.0126	0.2126	0.1866	-0.4061	-0.5983	0.4096	0.0193	0.1055
1.00	1.60	0.6327	0.3496	0.3084	-0.0098	0.2455	0.2145	-0.4415	-0.6498	0.3705	0.0237	0.1123
1.00	2.00	0.7342	0.4046	0.3541	-0.0158	0.2876	0.2455	-0.4822	-0.7067	0.3373	0.0321	0.1245
1.20	0.40	0.3903	0.3564	0.2600	-0.1068	0.2085	0.1762	-0.4186	-0.6017	0.4273	0.0450	0.1370
1.20	0.80	0.4728	0.3431	0.2679	-0.0696	0.2142	0.1842	-0.4182	-0.6066	0.4149	0.0361	0.1253
1.20	1.20	0.5731	0.3609	0.2937	-0.0519	0.2377	0.2044	-0.4372	-0.6367	0.3873	0.0333	0.1237
1.20	1.60	0.6714	0.3985	0.3307	-0.0459	0.2734	0.2324	-0.4671	-0.6807	0.3566	0.0357	0.1292
1.20	2.00	0.7630	0.4510	0.3745	-0.0498	0.3187	0.2657	-0.5032	-0.7314	0.3288	0.0420	0.1402

表 2 薄屏蔽板环状电极电场的边缘场各有限积分的数值, 理想场边界与电极边界重合
(A—b/k 的数值给定; B—d/k 的数值给定)

A											
b/k	d/k	I_{1a}/G^2	I_{1b}/G^2	I_2/G^3	I_{3a}/G^3	I_{3b}/G^3	I_{4a}/G	I_{4b}/G	$I_5 \times G$	$I_6 = -I_8$	I_7/G
0.25	0.4973	0.1028	0.1275	0.0239	0.0633	0.0726	-0.2350	0.3719	0.7417	-0.0799	0.0325
0.30	0.4846	0.1069	0.1297	0.0238	0.0709	0.0745	-0.2399	0.3775	0.7200	-0.0695	0.0349
0.35	0.4693	0.1117	0.1322	0.0235	0.0736	0.0766	-0.2455	0.3839	0.6994	-0.0597	0.0376
0.40	0.4513	0.1173	0.1352	0.0230	0.0766	0.0789	-0.2516	0.3911	0.6796	-0.0506	0.0407
0.45	0.4305	0.1237	0.1386	0.0221	0.0800	0.0815	-0.2583	0.3990	0.6605	-0.0419	0.0442
0.50	0.4065	0.1310	0.1425	0.0209	0.0837	0.0844	-0.2655	0.4076	0.6421	-0.0336	0.0480
0.55	0.3791	0.1391	0.1468	0.0191	0.0879	0.0876	-0.2734	0.4170	0.6243	-0.0257	0.0522
0.60	0.3479	0.1484	0.1516	0.0167	0.0924	0.0910	-0.2818	0.4272	0.6068	-0.0182	0.0568
0.65	0.3123	0.1587	0.1569	0.0135	0.0974	0.0947	-0.2908	0.4383	0.5897	-0.0108	0.0618
0.70	0.2716	0.1701	0.1627	0.0094	0.1026	0.0986	-0.3006	0.4503	0.5726	-0.0036	0.0672
0.75	0.2248	0.1827	0.1692	0.0044	0.1082	0.1026	-0.3112	0.4635	0.5554	0.0034	0.0729
0.80	0.1703	0.1959	0.1763	-0.0009	0.1134	0.1061	-0.3227	0.4780	0.5378	0.0103	0.0785
B											
0.8166	0.15	0.2002	0.1787	-0.0023	0.1149	0.1071	-0.3267	-0.4830	0.5317	0.0025	0.0802
0.7737	0.20	0.1890	0.1725	0.0019	0.1107	0.1043	-0.3166	-0.4702	0.5471	0.0067	0.0756
0.7240	0.25	0.1760	0.1658	0.0071	0.1053	0.1005	-0.3056	-0.4565	0.5644	-0.0002	0.0699
0.6658	0.30	0.1622	0.1587	0.0123	0.0990	0.0960	-0.2938	-0.4420	0.5842	-0.0085	0.0635
0.5968	0.35	0.1477	0.1512	0.0169	0.0921	0.0908	-0.2812	-0.4265	0.6079	-0.0186	0.0595
0.5125	0.40	0.1329	0.1435	0.0205	0.0847	0.0852	-0.2674	-0.4099	0.6376	-0.0316	0.0490
0.4034	0.45	0.1177	0.1354	0.0229	0.0768	0.0791	-0.2520	-0.3916	0.6783	-0.0500	0.0409

表3 厚屏蔽板电场和磁场的边缘场各有限积分的数值

b/k	d/k	h/k	I_1/G^2	I_4/G	I_{5m}/G^2
0.5	1.0	0.3181	0.1651	-0.3084	-0.0664
0.5	2.0	0.6766	0.3124	-0.4375	-0.1473
0.5	3.0	0.9119	0.5216	-0.5660	-0.2774
0.5	4.0	1.0873	0.7621	-0.6774	-0.4443
0.5	5.0	1.2238	1.0354	-0.7763	-0.6411
1.0	1.0	0.2302	0.1943	-0.3312	-0.0939
1.0	2.0	0.7189	0.3739	-0.4722	-0.1872
1.0	3.0	0.9340	0.5719	-0.5861	-0.3125
1.0	4.0	1.1026	0.7986	-0.6885	-0.4741
1.0	5.0	1.2360	1.0618	-0.7822	-0.6665
2.0	1.0	0.6960	0.4386	-0.4974	-0.2471
2.0	2.0	0.8565	0.5603	-0.5632	-0.3190
2.0	3.0	1.0132	0.7352	-0.6471	-0.4338
2.0	4.0	1.1505	0.9499	-0.7323	-0.5854
2.0	5.0	1.2670	1.2010	-0.8149	-0.7688
3.0	1.0	0.9188	0.7091	-0.6168	-0.4871
3.0	2.0	1.0064	0.8114	-0.6616	-0.5027
3.0	3.0	1.1152	0.9555	-0.7198	-0.6062
3.0	4.0	1.2204	1.1501	-0.7873	-0.7463
3.0	5.0	1.3190	1.3746	-0.8548	-0.9159

值。 b/k 和 d/k 的范围分别为0.5—3.0和1.0—5.0, 而 h/k 为0.3181—1.319。

(二) 边缘场有限积分的近似计算

以表1—3的边缘场有限积分的精确数值作为基础, 采用双值内插法和近似多项式法两种近似算法来获得任意屏蔽板结构的边缘场有限积分数值。

1. 双值内插法^[10]

把表1—3中的 b/k 和 d/k 作为二维平面座标, 要得到对应于给定的 b/k 和 d/k 值的边缘场有限积分的数值, 其步骤如下:

(1) 选择与给定的 b/k 和 d/k 相邻的四组边缘场有限积分数值。

(2) 首先以 b/k 为变量, 作相同 d/k 值的两组有限积分数值的 b/k 内插计算, 这样就得到给定的 b/k 值所对应的两个 d/k 数值有限积分数值。

(3) 再把上面两组数值根据给定的 d/k 数值内插, 求出各个有限积分数值。

2. 近似多项式法

表4 薄屏蔽板电场的边缘场有限积分的近似多项式 (理想场边界与电极端面不相重合 $x = b/k$ $y = d/k$)

h/k	$-0.456 + 0.129x + 0.994y + 0.516x^2 - 0.431xy - 0.237y^2$ $- 0.088x^3 - 0.156x^2y + 0.18xy^2 + 0.007y^3$
I_{1a}/G^2	$0.0727 - 0.0517x + 0.0328y + 0.3618x^2 - 0.0818xy + 0.063y^2$ $- 0.0794x^3 - 0.0503x^2y + 0.0361xy^2 - 0.0118y^3$
I_{1b}/G^2	$0.0948 - 0.0128x + 0.0338y + 0.2026x^2 - 0.0561xy + 0.0617y^2$ $- 0.0581x^3 - 0.0163x^2y + 0.0137xy^2 - 0.012y^3$
I_2/G^3	$0.01 + 0.058x + 0.004y - 0.069x^2 + 0.01xy + 0.007y^2$ $- 0.0078x^3 + 0.086x^2y - 0.046xy^2 + 0.002y^3$
I_{3a}/G^3	$0.0532 - 0.0943x + 0.0343y + 0.331x^2 - 0.0491xy + 0.0352y^2$ $- 0.1173x^3 - 0.0084x^2y + 0.016xy^2 - 0.0052y^3$
I_{3b}/G^3	$0.0556 - 0.074x + 0.0354y + 0.2768x^2 - 0.0473xy + 0.0326y^2$ $- 0.109x^3 + 0.0012x^2y + 0.0089xy^2 - 0.0058y^3$
I_{4a}/G	$-0.1703 - 1.052x - 0.0548y - 0.154x^2 + 0.1149xy - 0.0696y^2$ $+ 0.0441x^3 + 0.007x^2y - 0.0104xy^2 + 0.0155y^3$
I_{4b}/G	$-0.28 - 0.157x - 0.076y - 0.165x^2 + 0.157xy - 0.104y^2$ $+ 0.044x^3 + 0.005x^2y - 0.025xy^2 + 0.024y^3$
$I_5 \cdot G$	$1.093 - 0.861x - 0.453y + 0.254x^2 + 0.617xy - 0.007y^2$ $- 0.009x^3 - 0.146x^2y - 0.082xy^2 + 0.023y^3$
I_6	$-0.1541 + 0.3129x + 0.0237y - 0.1356x^2 - 0.1198xy + 0.0276y^2$ $+ 0.0209x^3 + 0.0458x^2y + 0.0011xy^2 - 0.0034y^3$
I_7/G	$0.0172 - 0.0001x + 0.0181y + 0.1583x^2 - 0.0606xy + 0.0163y^2$ $- 0.0511x^3 - 0.0051x^2y + 0.0132xy^2 - 0.0027y^3$

表5 薄屏蔽板电场的边缘场有限积分的近似多项式, 理想场边界与电极端面重合
(A— $x = b/k$, B— $x = d/k$)

A	
d/k	$0.557 - 0.255x + 0.233x^2 - 0.646x^3$
I_{1a}/G^2	$0.0944 - 0.0326x + 0.1912x^2$
I_{1b}/G^2	$0.125 - 0.014x + 0.097x^2$
I_2/G^3	$0.0245 - 0.0122x + 0.0676x^2 - 0.1154x^3$
I_{3a}/G^3	$0.0619 + 0.0089x + 0.0699x^2$
I_{3b}/G^3	$0.0708 - 0.0170x + 0.1089x^2 - 0.0401x^3$
I_{4a}/G	$-0.221 - 0.027x - 0.125x^2$
I_{4b}/G	$-0.36 - 0.01x - 0.17x^2$
$I_5 \cdot G$	$0.85 - 0.46x + 0.09x^2$
I_6	$-0.134 + 0.234x - 0.068x^2$
I_7/G	$0.026 + 0.0079x + 0.0726x^2$

B

b/k	$0.966 - 1.239x + 2.457x^2 - 5.511x^3$
I_{1a}/G^2	$0.232 - 0.19x - 0.145x^2$
I_{1b}/G^2	$0.1955 - 0.1009x - 0.0729x^2$
I_2/G^3	$-0.0064 - 0.04x + 0.5533x^2 - 0.7111x^3$
I_{3a}/G^3	$0.1248 - 0.0434x - 0.1414x^2$
I_{3b}/G^3	$0.1127 - 0.0174x - 0.1281x^2$
I_{4a}/G	$-0.35 + 0.128x + 0.2x^2$
I_{4b}/G	$-0.514 + 0.178x + 0.21x^2$
$I_5 \cdot G$	$0.465 + 0.621x - 1.585x^2 + 2.8x^3$
I_6	$0.039 - 0.25x + 0.698x^2 - 1.289x^3$
I_7/G	$0.0912 - 0.0526x - 0.1319x^2$

表6 厚屏蔽板边缘场有限积分的近似多项式 ($x = b/k$ $y = d/k$)

h/k	$-0.0868 + 0.2153x + 0.4251y + 0.0402x^2 - 0.1015xy - 0.0329y^2 - 0.0058x^3$ $+ 0.0013x^2y + 0.0089xy^2 + 0.0004y^3$
I_1/G^2	$-0.0824 + 0.1543x + 0.1216y + 0.0256x^2 - 0.0203xy + 0.0185y^2$
I_4/G	$-0.1021 - 0.1182x - 0.161y - 0.0224x^2 + 0.0449xy + 0.0023y^2 + 0.0029x^3$ $+ 0.0001x^2y - 0.0037xy^2 + 0.0006y^3$

近似多项式法是采用 M. A. Efroymsen 法^[12], 把边缘场有限积分用 x 和 y 两个变量的多项式来表示。表 4 是薄屏蔽板电场的边缘场有限积分在 x 和 y 为任意值时的表示式。表 5 是理想场边界与电极端面相重合时的表示式。表 6 是厚屏蔽板一般情况时的表示式。

为了比较, 表 7 中列出了有限积分数值的三种计算方法: (1) 精确算法; (2) 双值内插法; (3) 近似多项式法所得到的结果。从表 7 的比较中可以看出两种近似法得到的结果与精确计算结果是非常接近的。这两种近似算法可以用微型计算机, 甚至用计算器就可以进行。而精确算法则必须使用大型计算机。

实测边缘场分布时各个有限积分计算

当电极或屏蔽板不同于上述标准结构时, 边缘场的分布不能按照理论公式计算。这时必须进行实际测量, 再计算边缘场有限积分的数值。其步骤首先是对应于场强的最小值和理想场强之间坐标作为边缘场分布区间。由于每个测量点并不处于该区间的等分点上, 用内插法计算出相应的各等分点上的场强, 再根据位置和场强的数值, 按照精确法中的同样步骤分别计算出所需要的各个有限积分数值。

图 4 是一个没有屏蔽板情况时边缘场有限积分的计算示例。图的上部列出了 16 个测量点座标和场强及有限积分数值计算的结果。测量点是以电极端面为座标原点。图的中部给出了 32 个等分点的座标和场强。图的下部画出了场的分布和电极示意图。

表7 边缘场有限积分的精确计算和近似计算的数值比较
(1) 精确算法 (2) 双值内插法 (3) 近似多项式法

	b/k	d/k	h/k	I_{1a}/G^2	I_{1b}/G^2	I_2/G^3	I_{3a}/G^3	I_{3b}/G^3	I_{4a}/G	I_{4b}/G	I_{5xG}	$I_6 = -I_8$	I_7/G
(1)	0.47	1.74	0.6011	0.2718	0.2777	0.0293	0.1394	0.1753	-0.4042	-0.6097	0.3903	-0.0068	0.0809
(2)	0.47	1.74	0.6001	0.2737	0.2776	0.0281	0.1397	0.1760	-0.4048	-0.6102	0.3924	-0.0067	0.0816
(3)	0.47	1.74	0.6020	0.2709	0.2773	0.0284	0.1381	0.1748	-0.4046	-0.6116	0.3870	-0.0067	0.0807
(1)	0.76	1.05	0.4060	0.2330	0.2234	0.0153	0.1593	0.1482	-0.3568	-0.5345	0.4615	-0.0015	0.0797
(2)	0.76	1.05	0.4036	0.2358	0.2234	0.0158	0.1610	0.1484	-0.3584	-0.5366	0.4618	-0.0009	0.0807
(3)	0.76	1.05	0.4042	0.2322	0.2230	0.0158	0.1591	0.1482	-0.3564	-0.5346	0.4598	-0.0009	0.0796
(1)	1.12	0.68	0.4075	0.3165	0.2503	0.0573	0.1976	0.1721	-0.3998	-0.5814	0.4348	0.0321	0.1186
(2)	1.12	0.68	0.4068	0.3166	0.2502	0.0584	0.1972	0.1716	-0.3994	-0.5811	0.4366	0.0352	0.1184
(3)	1.12	0.68	0.4125	0.3183	0.2512	-0.0574	0.1997	0.1737	-0.4005	-0.5823	0.4335	0.0318	0.1192

	b/k	d/k	h/k	I_1/G^2	I_4/G
(1)	0.65	2.40	0.7856	0.4120	-0.5005
(2)	0.65	2.40	0.7810	0.4132	-0.4976
(3)	0.65	2.40	0.7811	0.3954	-0.4962
(1)	2.33	1.75	0.8567	0.6487	-0.5934
(2)	2.33	1.75	0.8776	0.6044	-0.5793
(3)	2.33	1.75	0.8670	0.6028	-0.5763

$K=1.0000$ NO. OF MEASURED POINTS = 16

NO. (POSITION, FIELD STRENGTH)

1 (-3.4340, 0.0004)	7 (-1.2817, 0.2909)	13 (0.8706, 0.9790)
2 (-3.0753, 0.0019)	8 (-0.9230, 0.4151)	14 (1.2293, 0.9913)
3 (-2.7166, 0.0100)	9 (-0.5643, 0.5648)	15 (1.5880, 0.9979)
4 (-2.3579, 0.0402)	10 (-0.2056, 0.7282)	16 (1.9467, 0.9993)
5 (-1.9992, 0.1033)	11 (0.1532, 0.8661)	
6 (-1.6604, 0.1884)	12 (0.5119, 0.9466)	

K	H/K	I1/G**2	I4/G	I5M/G**2
1.0000	0.7928	0.3884	-0.5002	-0.2067

NO.	S	P	NO.	S	P
1	-3.4340	0	17	-0.6569	0.5244
2	-3.2604	0.0011	18	-0.4833	0.6018
3	-3.0869	0.0019	19	-0.3097	0.6816
4	-2.9133	0.0056	20	-0.1362	0.7590
5	-2.7397	0.0095	21	0.0374	0.8279
6	-2.5661	0.0290	22	0.2110	0.8836
7	-2.3926	0.0376	23	0.3846	0.9250
8	-2.2190	0.0572	24	0.5581	0.9538
9	-2.0454	0.0923	25	0.7317	0.9720
10	-1.8719	0.1353	26	0.9053	0.9808
11	-1.6983	0.1790	27	1.0788	0.9844
12	-1.5247	0.2230	28	1.2524	0.9941
13	-1.3511	0.2704	29	1.4260	0.9956
15	-1.1776	0.3242	30	1.5996	0.9986
14	-1.0040	0.3849	31	1.7731	0.9993
16	-0.8304	0.4518	32	1.9467	1.0000

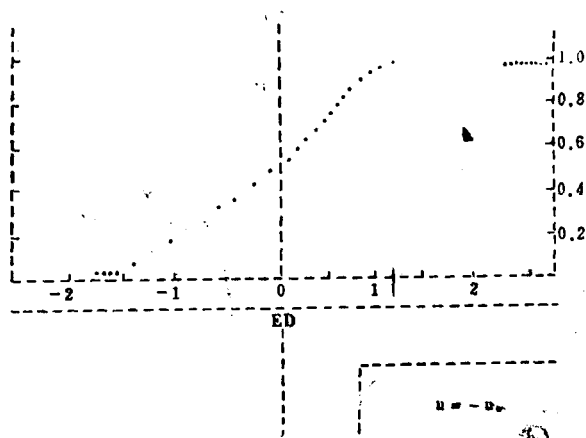


图4 实测边缘场分布的有限积分计算示例

参 考 文 献

- [1] R. Herzog, Z. Phys., 97 (1935) 596
- [2] H. Wollnik and H. Ewald, Nucl. Instrum. Methods, 36 (1965) 93
- [3] H. Matsuda, Nucl. Instrum. Methods. 91 (1971) 637
- [4] H. Matsuda and H. Wollnik, Nucl. Instrum. Methods, 77(1970)40, 283
- [5] T. Matsuo, H. Matsuda, Y. Fujita and H. Wollnik, Mass Spectrosc., 24(1976)19
- [6] M. Rauscher, Nucl. Instrum. Methods, 85(1970)333
- [7] U. Czok, K. Euler, M. Rauscher and H. Wollnik, Nucl. Instrum. Methods, 92(1971)365
- [8] H. Matsuda, Int. J. Mass Spectrom. Ion Phys., 14(1974)219
- [9] Z. H. Hu, T. Matsuo and H. Matsuda, Int. J. Mass Spectrom. Ion Phys., 42(1982)145
- [10] Z. H. Hu, T. Matsuo and H. Matsuda, Science Reports, 32(1983)21
- [11] H. Nestle, Private Communication (1981)
- [12] M. A. Efroymson, Multiple Regression Analysis in A. Rolston, H. S. Wilf, Mathem. Methods for Digital Computers, Vol.1, 1960 (John Wiley and Sons)

Numerical Calculation for Definite Integrals in Transfer Matrices of Fringing Fields of Electric (Magnetic) Field

Hu Zhaozheng

(Scientific Instrument Factory, Chinese Academy of Sciences, Beijing, China)

Received 10, May, 1986

Abstract

Three methods have been described to calculate definite integrals which are necessary for the trajectory calculations on the fringing fields of toroidal condensers and magnetic fields. Results of calculation are given for various electrode and magnetic pole structures.

In order to check the accuracy of both approximations, interpolation and polynomial, the results are compared with those obtained by accurate method. They are very close to the accurate value. Finally, a method has presented also for the fringing field distribution measured experimentally in magnetic field.